UNIVERSIDAD DE LOS LAGOS
DEPARTAMENTO DE CIENCIAS EXACTAS
PEDAGOGÍA EN MATEMÁTICA Y COMPUTACIÓN

Geometría 1 - 2015
Profesora: Cecilia Planas
Estudiante: Samuel Fuentes

Resumen[1]

1. Introducción

Postulado 1. El espacio es el conjunto de todos los puntos. Además las rectas y los planos son subconjuntos del espacio; es decir, las rectas y los planos son conjuntos cuyos elementos son puntos.

Postulado 2 (de la distancia)**.** A cada par de puntos diferentes les corresponde un único real positivo.

Postulado 3 (de la regla)**.** Hay una correspondencia entre los puntos de una recta y los números reales de manera que:

1. a cada punto de la recta corresponde exactamente un número real;
2. a cada número real corresponde exactamente un punto de la recta; y
3. la distancia entre dos puntos cualesquiera es el valor absoluto de la diferencia de los números correspondientes.

Definición 1. A cualquier correspondencia como la dada en el Postulado 3 se le llama sistema de coordenadas. Si P pertenece a una recta, entonces al número x que le corresponde al punto P se le llama coordenada de P.

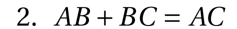
Postulado 4 (de colocación de la regla)**.** Dados dos puntos P y Q de una recta, se puede escoger el sistema de coordenadas de manera que la coordenada P sea cero y la coordenada Q sea positiva.

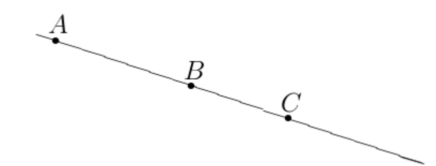
Postulado 5 (de la recta)**.** Dados dos puntos diferentes, existe solamente una recta a la cual pertenecen.

Teorema 1. Toda recta tiene al menos dos elementos.

2. Segmentos y Rayos

Definición 2. Decimos que un punto B está entre A y C cuando se cumplen las siguientes dos propiedades:

1. A, B y C están en una misma recta y son diferentes.
2. 
$AB + BC = AC$



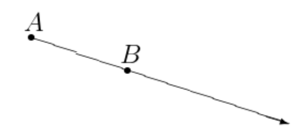
Teorema 2. Sean A, B y C tres puntos en una recta y sean x, y y z sus coordenadas respectivamente (con respecto a un sistema de coordenadas). El punto B está entre A y C si y sólo si $x < y < z$ ó $x > y > z$.

Definición 3. Dados dos puntos diferentes A y B, definimos el segmento $\overline{AB}$ como el conjunto de los puntos C tales que $C = A$, $C = B$ ó C está entre A y B.

Definición 4. Si A y B son dos puntos diferentes, entonces al número AB (la distancia entre A y B) se le llama la longitud del segmento $\overline{AB}$ y a los puntos A y B se les llama extremos del segmento $\overline{AB}$

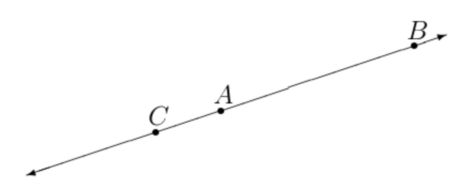
Definición 5. Dos segmentos son congruentes si tienen la misma longitud.

Definición 6. Si A y B son dos puntos diferentes, entonces definimos el rayo $\overrightarrow{AB}$ como el conjunto de todos los puntos C tales que $C \in \overline{AB}$ ó B está entre A y C.



Definición 7. Dado un rayo $\overrightarrow{AB}$, al punto A se le llama extremo del rayo $\overrightarrow{AB}$.

Definición 8. Si A está entre B y C, entonces a los rayos $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$ se les llama rayos opuestos.



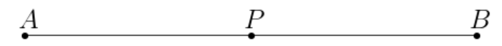
[1] Recopilado de: (1) Villarroel, C. & González, J. (2007), Geometría (1^a. Ed.). México: Sociedad Matemática Mexicana. (2) Moise, E. & Downs, F. (1966), Geometría Moderna (1^a. Ed.). México: Addison Wesley Iberoamericana. (3) Montoya, J. M. (s.f.) Geometría Euclideana. Colombia: Universidad de Antioquía.

Teorema 3 (de la localización de puntos)**.** Sea $\overrightarrow{AB}$ un rayo y $x > 0$. Existe solamente un punto $P \in \overrightarrow{AB}$, tal que $AP = x$.



Teorema 4. Sea $\overleftrightarrow{AB}$ una recta en la cual está definido un sistema de coordenadas tal que la coordenada de A es cero y la de B es un número positivo. El punto $P \in \overline{AB}$ si y sólo si la coordenada de P es AP.

Definición 9. Sea $A \neq B$. Decimos que P es el punto medio de $\overline{AB}$, si P está entre A y B, y $AP = PB$.



Teorema 5 (del punto medio)**.** Todo segmento tiene únicamente un punto medio.

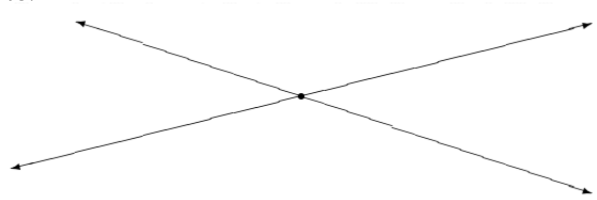
Definición 10. Si P es el punto medio de un segmento, decimos que P biseca al segmento.

Definición 11. Cuando algunos puntos están todos en una misma recta decimos que están alineados o que son colineales.

3. Planos

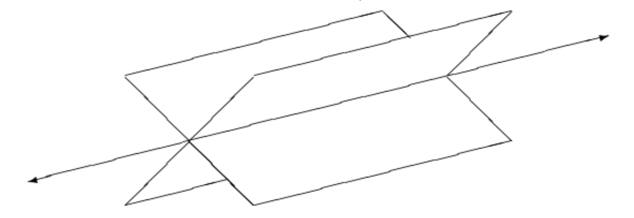
Postulado 6. A todo plano pertenecen al menos tres puntos diferentes que no están alineados, y al espacio pertenecen al menos cuatro puntos diferentes que no están en un plano.

Teorema 6. Si dos rectas diferentes tienen intersección no vacía, entonces la intersección tiene solamente un elemento.



Postulado 7 (del plano)**.** Tres puntos cualesquiera están en algún plano y tres puntos cualesquiera no alineados están solamente en un plano.

Postulado 8 (De la intersección de planos)**.** Si dos planos diferentes se intersecan, entonces su intersección es una recta.



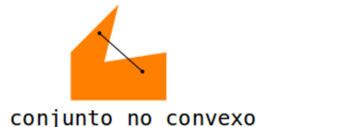
Teorema 7 (de la llaneza)**.** Si dos puntos diferentes de una recta pertenecen a un plano, entonces la recta a la que pertenecen los puntos está incluida en el plano.

Teorema 8. Dada una recta y un punto que no está en ella, existe solamente un plano al cual pertenece el punto y en el cual la recta está incluida.

Teorema 9. Dadas dos rectas diferentes que se intersecan, existe un único plano en el cual están incluidas.

4. Conjuntos Convexos

Definición 12. Un conjunto de puntos se dice que es convexo si para cada dos puntos diferentes P y Q del conjunto se tiene que el segmento $\overline{PQ}$ está incluido en el conjunto.





conjunto convexo

Postulado 9 (de separación del plano)**.** Sean l una recta y α un plano en el cual está incluida l. El conjunto de puntos del plano α que no están en en la recta l son la unión de dos conjuntos Λ_1 y Λ_2 tales que:

1. Los dos conjuntos Λ_1 y Λ_2 son convexos.
2. Si $P \in \Lambda_1$ y $Q \in \Lambda_2$, entonces $\overline{PQ}$ interseca a la recta.

Definición 13. En el postulado de separación del plano los conjuntos Λ_1 y Λ_2 se llaman lados de la recta l. Si $P \in \Lambda_1$ y $Q \in \Lambda_2$, decimos que P y Q están en lados opuestos de la recta l, también se dice que Λ_1 y Λ_2 son lados opuestos (de una recta). A la recta l se le llama arista o borde de cada uno de los conjuntos Λ_1, Λ_2, $\Lambda_1 \cup l$ y $\Lambda_2 \cup l$.

Definición 14. Si Λ es un lado de la recta l , diremos que los conjuntos de la forma Λ y $\Lambda \cup l$ son semiplanos. Para ser más específicos, los conjuntos de la forma Λ se llaman semiplanos abiertos y los de la forma $\Lambda \cup l$ se llaman semiplanos cerrados.

Teorema 10. Si Λ_1 y Λ_2 son lados opuestos de una recta l, entonces $\Lambda_1 \cap \Lambda_2 = \varnothing$

Postulado 10. De la separación del espacio: Dado un plano γ, el conjunto de puntos del espacio que no están en γ es la unión de dos conjuntos $\mathscr{G}_1$ y $\mathscr{G}_2$ tales que:

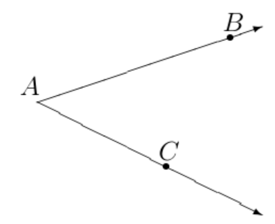
1. Los dos conjuntos $\mathscr{G}_1$ y $\mathscr{G}_2$ son convexos.
2. Si $P \in \mathscr{G}_1$ y $Q \in \mathscr{G}_2$, entonces $\overline{PQ}$ corta al plano γ.

Definición 15. Los dos conjuntos $\mathscr{G}_1$ y $\mathscr{G}_2$ descritos en el postulado de la separación del espacio se llaman lados del plano γ. Si $P \epsilon \mathscr{G}_1$, y $Q \epsilon \mathscr{G}_2$, decimos que P y Q están en lados opuestos del plano γ, también se dice que $\mathscr{G}_1$ y $\mathscr{G}_2$ son lados opuestos (de un plano). Al plano γ se le llama cara de cada uno de los conjuntos $\mathscr{G}_1$, $\mathscr{G}_2$, $\mathscr{G}_1 \cup l$ y $\mathscr{G}_2 \cup l$.

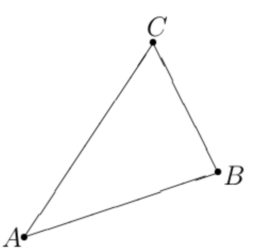
Definición 16. Si $\mathscr{G}$ es un lado de un plano γ, diremos que los conjuntos de la forma $\mathscr{G}$ y $\mathscr{G} \cup \gamma$ son semiespacios. Para ser más específicos, los conjuntos de la forma $\mathscr{G}$ se llaman semiespacios abiertos y los de la forma $\mathscr{G} \cup \gamma$ se llaman semiespacios cerrados.

5. Ángulos y Triángulos

Definición 17. A la unión de dos rayos de la forma $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$ que no están incluidos en una misma recta se le llama ángulo. Al ángulo que es la unión de dos rayos $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$ se le denomina indistintamente por $\angle BAC$ ó por $\angle CAB$. Al punto A de un ángulo $\angle BAC$ se le llama vértice del ángulo y a los rayos $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$ se les llama lados del ángulo.



Definición 18. Sean A, B y C tres puntos no alineados. A la unión de los segmentos $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ y $\overline{AC}$ se llama triángulo. A tal triángulo se le denota como $\triangle ABC$. A los segmentos $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ y $\overline{AC}$ se les llama lados y a los puntos A, B y C se les llama vértices del $\triangle ABC$.



Definición 19. Sea $\angle ABC$ un ángulo. Definimos el interior del $\angle ABC$ como el conjunto de todos los puntos del plano en el cual está incluido el ángulo tales que estén en el mismo lado que C de la recta $\overleftrightarrow{AB}$ y en el mismo lado que A de la recta $\overleftrightarrow{BC}$. Al conjunto de todos los puntos del plano que no están en el ángulo ni en su interior se le llama exterior del ángulo.

Definición 20. Sea $\triangle ABC$ un triángulo. Al conjunto de todos los puntos del plano en el cual está incluido el triángulo tales que están en los interiores de los angulos $\angle ABC$, $\angle BAC$ y $\angle ACB$ se le llama interior del $\triangle ABC$. El exterior del $\triangle ABC$ es el conjunto de todos los puntos del plano que no están en el $\triangle ABC$ ni en su interior.

Definición 21. A la unión de un triángulo con su interior se le llama región triangular. El triángulo será el borde de la región triangular y el interior de él también será el interior de la región triangular correspondiente.

6. Circunferencias

Definición 22. Sea O un punto en el plano y r un número positivo. Al conjunto de los puntos del plano que están a una r de O lo llamamos circunferencia. Al punto O se le llama centro de la circunferencia y al número r se le llama el radio de la circunferencia.

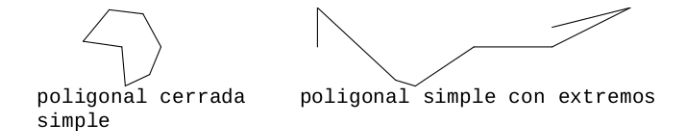
Definición 23. Dada una circunferencia en un plano. Al conjunto de los puntos del plano cuya distancia al centro de la circunferencia es menor que el radio se le llama interior de la circunferencia. Al conjunto de puntos del plano cuya distancia al centro de la circunferencia es mayor que el radio se le llama exterior de la circunferencia. A la unión de una circunferencia con su interior se le llama región circular o círculo. El borde de la región circular es la circunferencia. El interior de la región circular es el interior de la circunferencia. Definimos el diámetro de la circunferencia (y de la región circular correspondiente) como el doble de su radio.

Definición 24. Se dice que dos circunferencias son congruentes si tienen el mismo radio.

7. Longitud de Arco

Definición 25. Una linea poligonal es aquella que sin ser recta está compuesta de varios segmentos rectilíneos, de distintas direcciones, tales que el extremo de cada uno de ellos coincida con el origen de otro.

Definición 26. Una poligonal en la cual sus vértices son extremos solamente de dos lados y en la cual dos lados diferentes no se cortan más que posiblemente en un extremo común se llama poligonal simple.



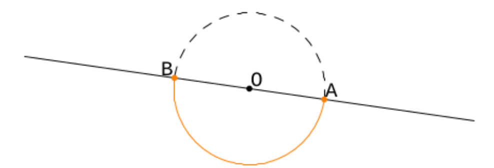
Definición 27. Decimos que una poligonal cerrada simple está inscrita en una circunferencia si sus vértices pertenecen a la circunferencia.



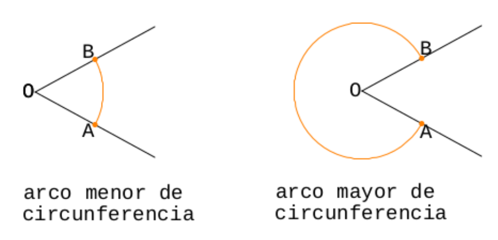
Definición 28. Sea c una circunferencia. Cuando exista un número real x tal que $x = sup$\{s:s es la longitud de alguna poligonal cerrada simple inscrita en c\}, a tal número lo llamamos longitud o perímetro de la circunferencia c.

Postulado 11. Siempre existe la longitud de cualquier circunferencia.

Definición 29. En un plano sea c una circunferencia con centro en O. Sean A y B dos puntos en la circunferencia tales que el punto medio de $\overline{AB}$ es el centro O de la circunferencia y Λ uno de los lados de $\overleftrightarrow{AB}$ en el plano. Al conjunto cuyos elementos son A, B y todos los elementos de c que están en Λ se le llama semicircunferencia y los puntos A y B son los extremos de la semicircunferencia.

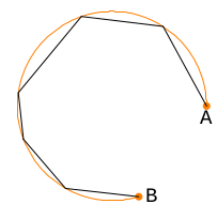


Definición 30. Sea C una circunferencia con centro en O. Sean A y B dos puntos en c tales que A, B y O no estén alineados. Definimos el arco menor de c con extremos en A y B como el conjunto cuyos elementos son A, B y todos los elementos de c que están en el interior del $\angle AOB$. Asimismo definimos el arco mayor de c con extremos A y B como el conjunto cuyos elementos son los puntos A, B y todos los elementos de c que están en el exterior del $\angle AOB$



Definición 31. Cualquier arco mayor o menor o semicircunferencia se llama arco de circunferencia. El centro de un arco de una circunferencia es el centro de la circunferencia. El símbolo $\overset{\frown}{AB}$ denotará siempre un arco de circunferencia con extremos en A y B. Si se quiere ser más específico se usará el símbolo $\overset{\frown}{AXB}$ para denotar al arco de la circunferencia con extremos A y B donde X es un elemento del arco diferente de A y de B.

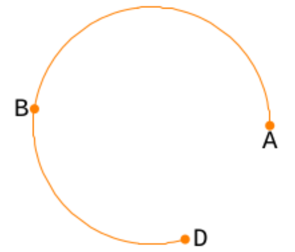
Definición 32. Sea $\overset{\frown}{AB}$ un arco de circunferencia. Definimos la longitud del arco $\overset{\frown}{AB}$ como:
$\ell\overset{\frown}{AB}$:= sup{s:s es la longitud de una poligonal simple con extremos A y B, cuyos vértices están en el arco $\overset{\frown}{AB}$}



Teorema 11. Todo arco de circunferencia tiene longitud mayor que cero.

Postulado 12 (De la adición de arcos)**.** Sea c una circunferencia cuya longitud es x.

1. Si $\overset{\frown}{AB}$ es una semicircunferencia incluida en c, entonces $\ell\overset{\frown}{AB} = \frac{x}{2}$
2. Si $\overset{\frown}{AB}$ y $\overset{\frown}{BD}$ son dos arcos diferentes incluidos en c cuya intersección es $\{B\}$ y cuya unión es un arco $\overset{\frown}{AD}$ incluido en c, entonces $\ell\overset{\frown}{AD} = \ell\overset{\frown}{AB} + \ell\overset{\frown}{BD}$



Postulado 13. Todas las circunferencias de radio 1 tienen la misma longitud.

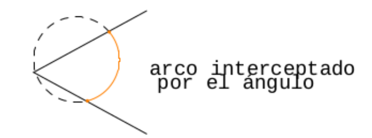
Definición 33. Definimos el número π (léase pi) como la mitad de la longitud de cualquier circunferencia de radio 1. Es decir, π es la longitud de una semicircunferencia incluida en una circunferencia de radio 1.

8. Medida de Ángulos

Definición 34. Un ángulo central de una circunferencia es un ángulo cuyo vértice es el centro de la circunferencia.

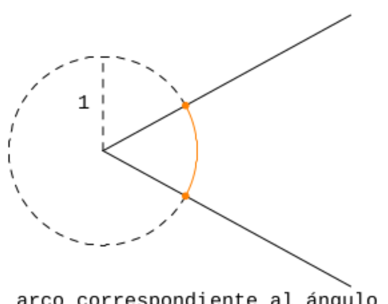
Definición 35. Decimos que un ángulo intercepta a un arco si:

1. los extremos del arco están en el ángulo
2. todos los otros puntos del arco están en el interior del ángulo, y
3. a cada lado del ángulo pertenece un extremo del arco.



Definición 36. El arco menor $\overset{\frown}{AB}$ corresponde al ángulo $\angle DOC$ si:

1. el arco $\overset{\frown}{AB}$ está incluido en una circunferencia de radio 1,
2. el ángulo $\angle DOC$ es un ángulo central de tal circunferencia, y
3. el ángulo $\angle DOC$ intercepta al arco $\overset{\frown}{AB}$



Definición 37. Dos arcos incluidos en circunferencias congruentes son congruentes si tienen la misma longitud.

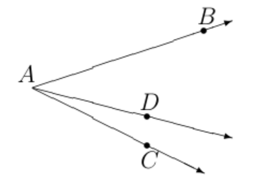
Definición 38. La medida de un ángulo $\angle DOC$, denotada por $|\angle DOC|$ ó $\measuredangle DOC$ es la longitud de su arco correspondiente.

Definición 39. Un grado está definido como $\frac{\pi}{180}$. Es decir, $\frac{\pi}{180} = \frac{2\pi}{360} = \frac{\pi/2}{90} = \frac{\pi/3}{60} = \frac{\pi/6}{30} = \frac{\pi/4}{45}$ es un grado, lo cual significa que:
π =180 grados,
2π =360 grados,
$\frac{\pi}{2}$ =90 grados,
$\frac{\pi}{3}$ =60 grados,
$\frac{\pi}{6}$ =30 grados,
$\frac{\pi}{4}$ =45 grados.
Si $x \in \mathbb{R}$, entonces $x°$ denota x grados, así por ejemplo $\frac{\pi}{2} = 90°$, $\frac{\pi}{3} = 60°$, $\frac{\pi}{6} = 30°$, $\frac{\pi}{4} = 45°$, $\frac{\pi}{180} = 1°$

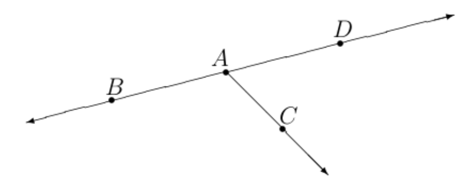
Teorema 12. La medida de un ángulo es un número real mayor que 0 y menor que π

Postulado 14 (de construcción de ángulos)**.** Sea $\overrightarrow{AB}$ un rayo incluido en la arista de un semiplano Λ. Para cada número r entre 0 y π existe únicamente un rayo $\overrightarrow{AP}$, con $P \in \Lambda$, tal que $\measuredangle PAB = r$

Teorema 13 (de adición de ángulos)**.** Si D está en el interior del $\angle BAC$, entonces $\measuredangle BAC = \measuredangle BAD + \measuredangle DAC$.



Definición 40. Si $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AD}$ son rayos opuestos, y $\overrightarrow{AC}$ es otro rayo decimos que los ángulos $\angle BAC$ y $\angle CAD$ forman un par lineal.



Definición 41. Dos ángulos son suplementarios si la suma de sus medidas es π. Además se dice que uno es suplementario del otro.

Definición 42. Dos ángulos son complementarios si la suma de sus medidas es $\frac{\pi}{2}$. Además se dice que uno es complemento del otro.

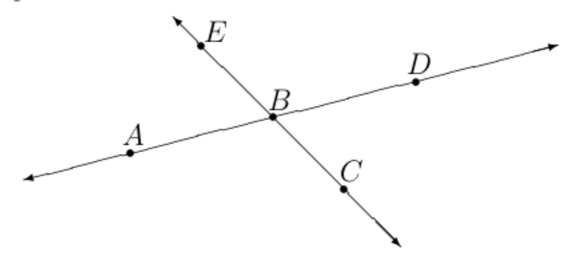
Teorema 14 (Teorema del suplemento o del par lineal)**.** Si dos ángulos forman un par lineal entonces son suplementarios

Definición 43. Un ángulo recto es un ángulo cuya medida es $\frac{\pi}{2}$, es decir cuya medida es de 90°

Definición 44. Si $\angle BAC$ es recto, entonces decimos que los rayos $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$ son perpendiculares (en A) y a tal hecho lo denotamos como $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AC}$. De manera más general, si ℓ_1 es una recta, rayo o segmento tal que $A \in \ell_1 \subset \overleftrightarrow{AB}$ y ℓ_2 es una recta, rayo o segmento tal que $A \in \ell_1 \subset \overleftrightarrow{AC}$, entonces decimos que ℓ_1 es perpendicular a ℓ_2 o que ℓ_1 y ℓ_2 son perpendiculares y los denotamos como $\ell_1 \perp \ell_2$

Definición 45. Dos ángulos que tienen la misma medida se dice que son congruentes, también se dice que uno es congruente con el otro.

Definición 46. Dos ángulos $\angle ABC$ y $\angle DBE$ son opuestos por el vértice si $\overrightarrow{BD}$ es opuesto a un lado de $\angle ABC$ y el otro lado de $\angle DBE$ es opuesto al otro lado de $\angle ABC$.



Teorema 15 (De los ángulos opuestos por el vértice)**.** Dos ángulos opuestos por el vértice son congruentes.

9. Congruencia de Triángulos

Definición 47. Dados dos triángulos $\triangle ABC$ y $\triangle DEF$. Decimos que la correspondencia $ABC \leftrightarrow DEF$ es una congruencia si cualesquiera dos ángulos correspondencia son congruentes y cualesquiera dos lados correspondientes son congruentes. Más precisamente $ABC \leftrightarrow DEF$ es una congruencia si:
$\angle BAC \cong \angle EDF$; $\angle ABC \cong \angle DEF$; $\angle ACB \cong \angle DFE$
$\overline{AB} \cong \overline{DE}$; $\overline{BC} \cong \overline{EF}$; $\overline{AC} \cong \overline{DF}$.
Al hecho de que $ABC \leftrightarrow DEF$ sea una congruencia lo denotamos así: $ABC \cong DEF$

Definición 48. Decimos que dos triángulos t_1 y t_2 son congruentes (denotado $t_1 \cong t_2$) si existe una correspondencia entre los vértices del primero y del segundo que sea una congruencia.

Definición 49. Decimos que un lado de un triángulo está comprendido por los ángulos cuyos vértices son extremos del lado. Un ángulo de un triángulo está comprendido por los lados del triángulo que tienen como extremo común al vértice del ángulo. Por ejemplo, en un $\triangle ABC$, el ángulo $\angle BC$ está comprendido por $\overrightarrow{AB} y por \overrightarrow{BC}$, y el lado $\overline{AB}$ está comprendido por $\angle BAC$ y por $\angle ABC$.

Definición 50. En un triángulo, si un ángulo dado está comprendido por dos lados, al otro lado se le llama lado opuesto al ángulo dado. Similarmente, si un lado dado está comprendido por dos ángulos, al otro se le llama ángulo opuesto al lado dado. Por ejemplo en el $\triangle ABC$, $\overline{AC}$ es el lado opuesto a $\angle ABC$ y el lado $\overline{AB}$ es opuesto al ángulo $\overline{ACB}$. Un ángulo y un lado de un triángulo que no son opuestos se dice que son adyacentes o que uno es adyacente al otro.

10. Postulados y Teoremas de Congruencia de Triángulos

Definición 51. Dada una correspondencia $ABC \leftrightarrow DEF$ entre dos triángulos decimos que es una correspondencia lado-ángulo-lado o abreviadamente LAL si dos lados del $\triangle ABC$ y el ángulo comprendido entre ellos son congruentes con las partes correspondientes del $\triangle DEF$

Definición 52. Dada una correspondencia $ABC \leftrightarrow DEF$ entre dos triángulos decimos que es una correspondencia ángulo-lado-ángulo o abreviadamente ALA si dos ángulos del $\triangle ABC$ y el lado comprendido entre ellos son congruentes con las partes correspondientes del $\triangle DEF$

Definición 53. Dada una correspondencia $ABC \leftrightarrow DEF$ entre dos triángulos decimos que es una correspondencia lado-lado-lado o abreviadamente LLL si los lados correspondientes son congruentes.

Postulado 15 (Postulado LAL)**.** Toda correspondencia LAL es una congruencia.

Teorema 16 (Teorema ALA)**.** Toda correspondencia ALA es una congruencia.

Definición 54. Un triángulo es escaleno si ninguno de sus lados es congruente con otro de sus lados.

Definición 55. Un triángulo es isósceles si al menos dos de sus lados son congruentes.

Definición 56. Un triángulo es equilátero si sus tres lados son congruentes

Teorema 17 (del triángulo isósceles)**.** Si dos lados de un triángulo son congruentes, entonces los ángulos opuestos a éstos son congruentes. Es decir, en un triángulo isósceles los ángulos opuestos a los lados congruentes son congruentes.

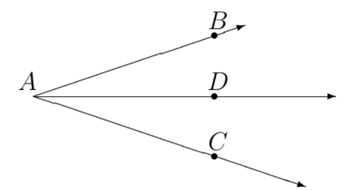
- **Corolario 17.1.** (del triángulo equilátero) Todo triángulo equilátero tiene sus tres ángulos congruentes.

Teorema 18 (recíproco del teorema del triángulo isósceles)**.** Si dos ángulos de un triángulo son congruentes, entonces los lados opuestos son congruentes.

- **Corolario 18.1.** Todo triángulos que tiene todos sus ángulos congruentes es equilátero.

Teorema 19 (Teorema LLL)**.** Toda correspondencia LLL es una congruencia.

Definición 57. Si D está en el interior del $\angle BAC$ y $\angle BAD \cong \angle CAD$, entonces el rayo $\overrightarrow{AD}$ biseca al $\angle BAC$ y se llama la bisectriz del $\angle BAC$.



Teorema 20 (de la bisectriz)**.** Todo ángulo tiene solamente una bisectriz.

Teorema 21. Todos los puntos de la bisectriz de un ángulo diferentes del extremo están en el interior del ángulo.

11. Perpendicularidad

Teorema 22. Dada una recta l y un punto Q que no está en ella. Existe solamente una recta l' perpendicular a l tal que $Q \in l'$.

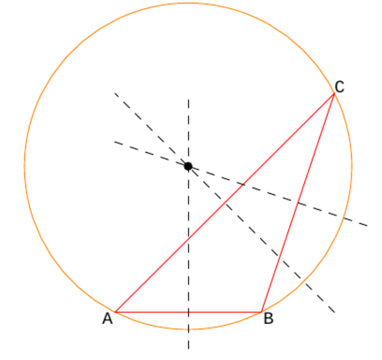
- **Corolario 22.1.** Ningún triángulo tiene dos ángulos rectos diferentes. Es decir si un ángulo de un triángulo es recto, entonces los otros dos no son rectos.

Definición 58. Un triángulo rectángulo es un triángulo en el cual uno de sus ángulos es recto.

Definición 59. Una mediatriz de un segmento es una recta perpendicular al segmento en su punto medio.

- **Corolario** (del teorema de la mediatriz) Las mediatrices de los lados de un triángulo se cortan en un punto común, el cual es el centro de la única circunferencia a la que pertenecen los tres vértices del triángulo.

Definición 60. La circunferencia a la cual pertenecen los vértices de un $\triangle ABC$ se dice que está circunscrita en el triángulo. Al centro de tal circunferencia se le llama circuncentro del $\triangle ABC$.



Por el corolario anterior, se concluye que el circuncentro de un triángulo es el punto de intersección de las mediatrices de los lados.

Definición 61. Una recta dada y un plano son perpendiculares si se intersecan y además toda recta en el plano que pasa por el punto de intersección es perpendicular a la recta dada. Cuando una recta l y un plano Π son perpendiculares escribimos $l \perp \Pi$.

Lema 1. Si B, C, P, Q son cuatro puntos diferentes tales que $PB = QB$, $PC = QC$ y X es un punto entre B y C, entonces $PX = QX$.

Teorema 23. Si una recta l es perpendicular a dos rectas diferentes l_1 y l_2 que se intersecan, entonces l es perpendicular al plano que incluye a las dos rectas l_1 y l_2.

Teorema 24. Sea l una recta y $P \in l$. Existe un plano Π tal que $l \perp \Pi$ y $P \in \Pi$.

Teorema 25. Si una recta dada y un plano son perpendiculares, entonces el plano incluye a toda recta perpendicular a la recta dada en su punto de intersección.

Teorema 26. Dados una recta y un punto en la recta, existe solamente un plano perpendicular a la recta al cual pertenece el punto.

Teorema 27 (Del plano bisecante perpendicular)**.** El plano bisecante perpendicular de un segmento es el conjunto de todos los puntos equidistantes de los extremos del segmento.

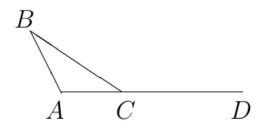
Teorema 28. Dos rectas perpendiculares al mismo plano son coplanarias

12. Desigualdades Geométricas

Definición 62. Dados dos segmentos $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$, decimos que el segmento $\overline{AB}$ es mayor que el segmento $\overline{CD}$, denotado $\overline{AB} > \overline{CD}$, si $AB > CD$. Si $\overline{AB} > \overline{CD}$ también decimos que $\overline{CD}$ es menor que $\overline{AB}$ y los denotamos como $\overline{CD} < \overline{AB}$.

Definición 63. Dados dos ángulos $\angle ABC$ y $\angle DEF$, decimos que $\angle ABC$ es mayor que $\angle DEF$, denotado $\angle ABC > \angle DEF$ si $m\angle ABC > m\angle DEF$. Si $\angle ABC > \angle DEF$ también decimos que el ángulo $\angle DEF$ es menor que el ángulo $\angle ABC$ y lo denotamos así: $\angle DEF < \angle ABC$.

Definición 64. En un triángulo $\triangle ABC$ si $\overrightarrow{CA}$ y $\overrightarrow{CD}$ son rayos opuestos, decimos que el ángulo $\angle BCD$ es un ángulo externo del $\triangle ABC$. Además a los ángulos $\angle ABC$ y $\angle BAC$ se les llaman ángulos internos no contiguos al $\angle BCD$. Al $\angle ACB$ se le llama ángulo interno contiguo al $\angle BCD$.



Teorema 29 (del ángulo externo.)**.** Un ángulo externo de un triángulo es mayor que cada uno de sus ángulos internos no contiguos.

Definición 65. Decimos que un ángulo es agudo si mide menos de 90° y que es obtuso si mide más de 90°.

- **Corolario 29.1.** Si un triángulo tiene un ángulo recto, entonces los otros dos ángulos son agudos.
- **Corolario 29.2.** Si un triángulo tiene un ángulo obtuso, entonces los otros dos ángulos son agudos.
- **Corolario 29.3.** En cualquier triángulo al menos dos de sus ángulos son agudos.

Definición 66. Sea $ABC \leftrightarrow DEF$ una correspondencia entre dos triángulos. Si $AB = DE$, $\angle ABC \cong \angle DEF$ y $\angle BCA \cong \angle EFD$, entonces decimos que es una correspondencia lado-ángulo-ángulo, o LAA.

Teorema 30 (Teorema LAA)**.** Toda correspondencia LAA es una congruencia.

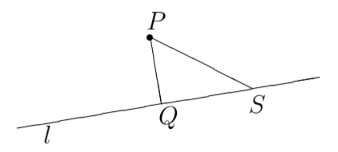
Definición 67. En un triángulo rectángulo al lado opuesto al ángulo recto se le llama hipotenusa, y a cada lado adyacente al angulo recto se le llama cateto.

Teorema 31 (de la hipotenusa y el cateto)**.** Dada una correspondencia entre dos triángulos tal que las hipotenusas de ambos son correspondientes. Si la hipotenusa y un cateto de un triángulo son congruentes con las partes correspondientes del segundo, entonces la correspondencia es una congruencia.

Teorema 32. Si dos lados de un triángulo no son congruentes, entonces los ángulos opuestos a estos lados no son congruentes y el ángulo mayor es el opuesto al lado mayor.

Teorema 33. Si dos ángulos de un triángulos no son congruentes, entonces los lados opuestos a estos ángulos no son congruentes y el lado mayor es opuesto al ángulo mayor.

Teorema 34 (Primer teorema de la distancia mínima)**.** Sea l una recta, P un punto que no está en ella, $Q \in l$ tal que $\overline{PQ} \perp l$, y $S \in l$ tal que $S \neq Q$. Tenemos que $PQ < PS$.
Dicho de otra manera, el segmento más corto que une un punto con una recta es el segmento perpendicular a la recta.



Definición 68. Sea l una recta y P un punto que no está en ella. Definimos la distancia entre P y l como la longitud del segmento $\overline{PQ}$ tal que $Q \in l$ y $\overline{PQ} \perp l$.

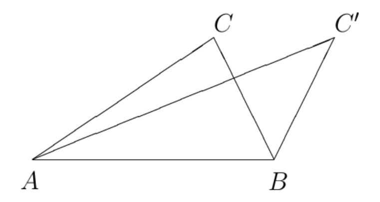
Teorema 35 (Desigualdad del triángulo)**.** Sea $\triangle ABC$ un triángulo: $AB + BC > AC$

Definición 69. Una circunferencia y una recta incluidas en un mismo plano se dice que son tangentes si su intersección tiene solamente un punto. En estas condiciones también se dice que una es tangente a la otra en el punto de intersección. También decimos que un segmento es tangente a una circunferencia cuando se intersecan y la recta que contiene al segmento es tangente a la circunferencia.

Teorema 36. Toda tangente a una circunferencia es perpendicular al radio trazado por el punto de contacto

Teorema 37 (recíproco del anterior)**.** Una recta perpendicular a un radio en su extremo es tangente a la circunferencia

Teorema 38 (de la bizagra)**.** Sean $\triangle ABC$ y $\triangle ABC'$ dos triángulos tales que C y C' están del mismo lado de $\overleftrightarrow{AB}$, $BC = BC'$ y $\angle ABC < \angle ABC'$. El segmento $\overline{AC'}$ es más largo que el segmento $\overline{AC}$.



13. Rectas Paralelas

Postulado 16. Se conoce como el quinto postulado de Euclides: Por un punto exterior a una recta pasa una y solo una recta paralela a la recta dada.

Teorema 39. Si dos rectas cortadas por una transversal forman ángulos alternos internos congruentes, entonces son paralelas.

Teorema 40 (recíproco del anterior)**.** Si dos rectas paralelas son cortadas por una transversal, entonces forman ángulos alternos internos congruentes.

Teorema 41. Si dos rectas son cortadas por una transversal y forman ángulos correspondientes congruentes, entonces son paralelas.

Teorema 42. Si dos rectas paralelas son cortadas por una transversal, entonces los ángulos correspondientes son congruentes.

Teorema 43. Si dos rectas paralelas son cortadas por una transversal, los ángulos consecutivos interiores son suplementarios.

Teorema 44 (recíproco del anterior)**.** Si dos rectas son cortadas por una transversal, determinan ángulos consecutivos interiores suplementarios, las rectas son paralelas.

Teorema 45. La medida de un ángulo exterior de un triangulo es igual a la suma de las medidas de los interiores no adyacentes a él.

Teorema 46. La suma de los ángulos interiores de un triángulo es 180°.

- **Corolario 1.** En un triangulo no puede haber más de un ángulo interior que mida 90° o más de 90°
- **Corolario 2.** Si un triangulo tiene dos de sus ángulos respectivamente congruentes a dos ángulos de otro triangulo, entonces el tercer ángulo del primero es congruente al tercer ángulo del segundo.
- **Corolario 3.** Los ángulos agudos de un triangulo rectángulo son complementarios.

Teorema 47 (30 - 60 - 90)**.** Si un triangulo rectángulo tiene un ángulo agudo de 30º, entonces el cateo opuesto a este ángulo mide la mitad de la hipotenusa.

Teorema 48. En un plano, si dos ángulos tienen sus lados respectivamente perpendiculares, entonces son congruentes.

Definición 70. La distancia de un punto a una recta, es la longitud del segmento perpendicular trazado del punto a la recta.

Definición 71. Lugar geométrico: Es el conjunto de puntos de un plano que cumplen una o varias condiciones.

Teorema 49. La bisectriz de un ángulo es el lugar geométrico de puntos que equidistan de los lados del ángulo.

14. Cuadriláteros

Definición 72. Un cuadrilátero es un polígono de cuatro lados.

Definición 73. Paralelogramo: Es un cuadrilátero que tiene las parejas de lados opuestos paralelos.

Definición 74. Rombo: Es un paralelogramo con todos sus lados congruentes

Definición 75. Rectángulo: Es un paralelogramo con todos sus ángulos rectos.

Definición 76. Cuadrado: Es un rectángulo con sus cuatro lados congruentes.

Definición 77. Trapecio: Un cuadrilátero es un trapecio si tiene uno y solo un par de lados paralelos. Los lados paralelos del trapecio se llaman bases.

Definición 78. Trapecio Isósceles: Un trapecio es isósceles si tiene los lados no paralelos congruentes.

Teorema 50. La suma de los ángulos interiores de un cuadrilátero es 360°

Teorema 51. En un paralelogramo los lados opuestos son congruentes.

Teorema 52 (recíproco del anterior)**.** Si en un cuadrilátero los dos pares de lados opuestos son congruentes, entonces el cuadrilátero es un paralelogramo.

Teorema 53. En un paralelogramo los ángulos opuestos son congruentes.

Teorema 54. Si en un cuadrilátero los ángulos opuestos son congruentes, entonces el cuadrilátero es un paralelogramo.

Teorema 55. Si un cuadrilátero tiene dos lados opuestos congruentes y paralelos entonces el cuadrilátero es un paralelogramo.

Teorema 56 (recíproco del anterior)**.** En un paralelogramo dos lados opuestos son paralelos y congruentes.

Teorema 57. Si en un cuadrilátero las diagonales se bisecan, entonces es un paralelogramo.

Teorema 58 (recíproco del anterior)**.** En un paralelogramo las diagonales se bisecan.

Corolarios de los teoremas anteriores:

- Dos ángulos consecutivos de un paralelogramo son suplementarios.
- Los segmentos de un par de rectas paralelas comprendidas entre un segundo par de rectas paralelas son congruentes.
- Dos rectas paralelas son equidistantes en toda su longitud.
- Las diagonales de un rectángulo son congruentes.
- Las diagonales de un rombo son perpendiculares y son bisectrices de los ángulos de los vértices. (El recíproco no se cumple)

Definición 79. Una secante es una recta que corta en puntos diferentes a varias rectas paralelas.

Teorema 59 (Fundamental del Paralelismo (T.F.P))**.** Si tres o más rectas paralelas, determinan segmentos congruentes en una secante, entonces determinan segmentos congruentes sobre cualquier otra secante.

Teorema 60 (de la paralela media en un triángulo)**.** El segmento que une los puntos medios de dos lados de un triángulo es paralelo al tercer lado y tiene por medida la mitad de ese lado.

Teorema 61. Una recta paralela a un lado de un triángulo y que pasa por el punto medio de un lado, pasa por el punto medio del otro lado.

Definición 80. El segmento que une los puntos medios de los lados no paralelos de un trapecio se llama base media.

Teorema 62 (de la base media)**.** La base media de un trapecio es paralela a los lados paralelos y tiene por medida la semisuma de las medidas de las bases del trapecio.

Teorema 63 (Extensión del teorema de la paralela media)**.** Si por un punto medio de un lado no paralelo de un trapecio se traza una paralela a las bases, esta paralela pasa por el punto medio del otro lado no paralelo.

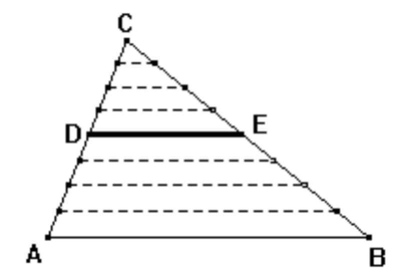
Teorema 64. El punto medio de la hipotenusa de un triángulo rectángulo equidista de los vértices. O de otra forma: La mediana sobre la hipotenusa mide la mitad de la hipotenusa.

Teorema 65. Las transversales de gravedad de un triángulo se cortan en un punto G, llamado baricentro. G está a 2/3 de cada vértice.

15. Proporcionalidad y Semejanza

Teorema 66 (Fundamental de la Proporcionalidad)**.** Si se traza una paralela a un lado de un triangulo, determina segmentos proporcionales en los otros dos lados.

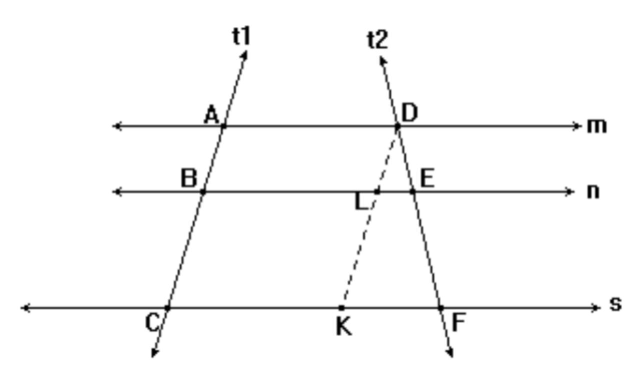
$$\frac{CD}{DA} = \frac{CE}{EB}$$



Teorema 67 (recíproco del anterior)**.** Si una recta corta a dos lados de un triángulo y determinan segmentos proporcionales en los otros dos lados, entonces la recta es paralela al tercer lado.

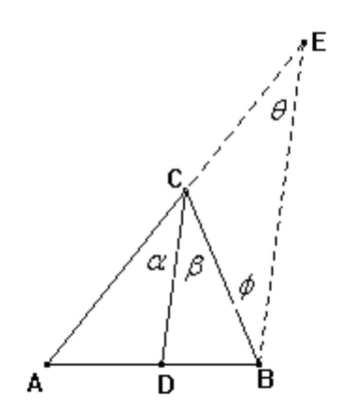
Teorema 68 (de Thales)**.** Si tres o más rectas paralelas son cortadas por dos transversales, entonces los segmentos de una transversal son proporcionales a sus correspondientes en la otra.

$$\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF}$$



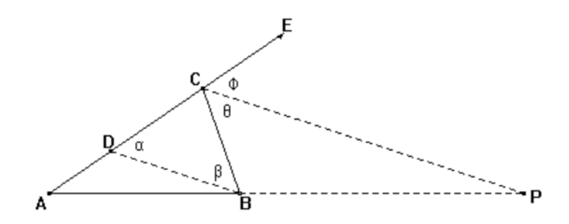
Teorema 69. En todo triangulo la bisectriz de un ángulo interno divide al lado opuesto en segmentos proporcionales a los lados adyacentes.

$$\frac{AD}{AC} = \frac{DB}{BC}$$

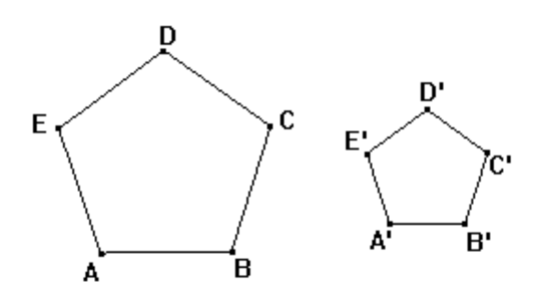


Teorema 70. La bisectriz de un ángulo exterior de un triangulo no isósceles, divide a la prolongación del lado opuesto al ángulo en segmentos proporcionales a sus lados adyacentes.

$$\frac{AP}{AC} = \frac{BP}{BC}$$



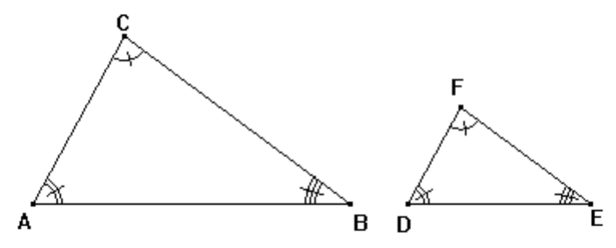
Definición 81 (Semejanza de polígonos)**.** Dos polígonos son semejantes si entre sus vértices existe una correspondencia tal que los ángulos correspondientes son congruentes y los lados correspondientes son proporcionales. $\angle A \cong \angle A'; \angle B \cong \angle B'; \angle C \cong \angle C'; \angle D \cong \angle D'; \angle E \cong \angle E'$ $\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CD}{C'D'} = \frac{DE}{D'E'} = \frac{EA}{E'A'} = k$



Definición 82 (Semejanza de triángulos)**.** Dos triángulos son semejantes si tienen la misma forma. En los triángulos semejantes se cumple que los ángulos correspondientes son congruentes y los lados correspondientes son proporcionales.

$$\angle A \cong \angle D; \angle B \cong \angle E; \angle C \cong \angle F$$

$$\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF} = \frac{BC}{EF}$$

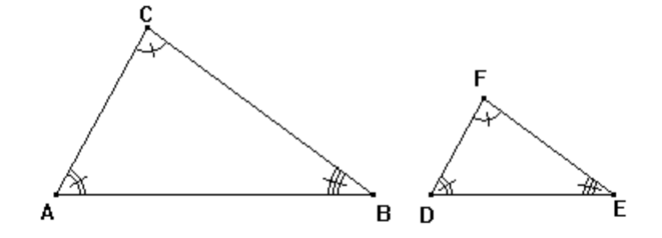


La semejanza es una relación de equivalencia, o sea que se cumple:

1. Propiedad reflexiva: $\triangle ABC \sim \triangle ABC$
2. Propiedad simétrica: $\triangle ABC \sim \triangle DEF \Rightarrow \triangle DEF \sim \triangle ABC$
3. Propiedad transitiva: $(\triangle ABC \sim \triangle DEF \wedge \triangle DEF \sim \triangle PQR) \Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle PQR$

Teorema 71 (de semejanza A-A-A)**.** Si dos triángulos tienen sus ángulos respectivamente congruentes, entonces son semejantes.

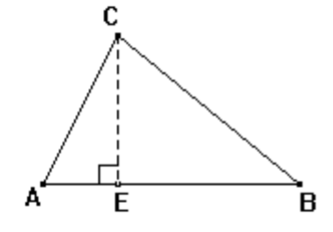
$$\angle A \cong \angle R; \angle B \cong \angle S; \angle C \cong \angle T \Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle RST$$

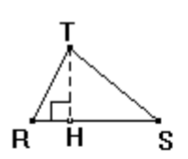


- **Corolario 71.1.** Si dos triángulos tienen dos ángulos congruentes entonces son semejantes (A-A).
- **Corolario 71.2.** Si dos triángulos rectángulos tienen un ángulo agudo congruente entonces son semejantes.

- **Corolario 71.3.** Las alturas correspondientes de dos triángulos semejantes tienen la misma razón que la de dos lados correspondientes.

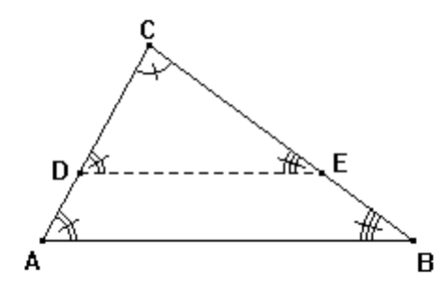
$$\frac{CE}{TH} = \frac{AC}{RT} = \frac{AB}{RS} = \frac{BC}{ST}$$





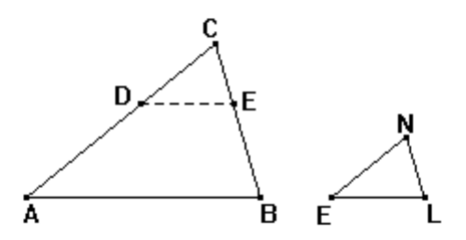
- **Corolario 71.4.** Si se traza una recta paralela a un lado de un triángulo se determina otro triángulo semejante al primero.

$$\overline{DE} \parallel \overline{AB} \Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle DEC$$



Teorema 72 (de semejanza L-A-L)**.** Si en dos triángulos dos lados correspondientes son proporcionales y los ángulos comprendidos entre ellos son congruentes, entonces los triángulos son semejantes.

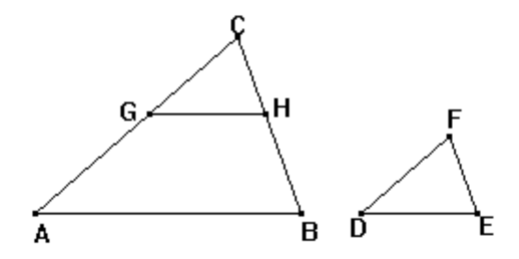
$$\left(\frac{CA}{NE} = \frac{CB}{NL} \wedge \angle C \cong \angle N\right) \Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle ELN$$



- **Corolario 72.1.** Si en dos triángulos rectángulos los catetos son proporcionales, entonces los triángulos son semejantes.

Teorema 73 (de semejanza L-L-L)**.** Si en dos triángulos sus lados correspondientes son proporcionales, entonces los triángulos son semejantes.

$$\frac{CA}{FD} = \frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} \Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle DEF$$



- **Corolario 73.1.** Si dos triángulos rectángulos tienen la hipotenusa y un cateto respectivamente proporcionales, entonces son semejantes.

- **Corolario 73.2.** Si dos triángulos isósceles tienen un ángulo cualquiera respectivamente congruentes, entonces son semejantes.